ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. II 1980

А.С. Сенилов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ${}_{\sigma}V_{k+3}$ В P_N

Рассмотрим в N -мерном проективном пространстве P_N поверхность V_{k+3} –трехпараметрическое семейство k-мерных плоскостей L_k. Торсом семейства k-мерных плоскостей называется однопараметрическое подсемейство, у которого текущая плоскость L_k и бесконечно близкая $L_k + d_a L_k$ при смещении в этом подсемействе пересекаются по (k-1)-мерной плоскости L^a_{k-1}, называемой характеристикой плоскости L_k. Плоскость ${}^aL_{k+1}$, в которой лежат вышеупомянутые плоскости L_k и $L_k + d_a L_k$ называют фокальной плоскостью данного торса в плоскости L_k.

Будем рассматривать поверхности ${}_{\sigma}V_{k+3}$, имеющие σ семейств торсов ($\sigma = 1,2$). Строение таких поверхностей зависит от числа семейств торсов и от взаимного расположения характеристик L^1_{k-1} и L^2_{k-1} в образующей плоскости L_k, если $\sigma = 2$. Пересечение характеристик назовем характеристической плоскостью.

Отнесем поверхность ${}_{\sigma}V_{k+3}$ к проективному реперу, состоящему из $N+1$ аналитических точек A_{α} ($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \dots, N$). Уравнения инфинитезимальных перемещений репера и уравнения структуры проективного пространства имеют обычный вид (см. [1]).

I. Рассмотрим поверхности ${}_1V_{k+3}$. Пусть $i, j = \overline{1,k}$; $p, q = \overline{k+4, N}$. Определим образующую плоскость поверхности, ее характеристику и фокальную плоскость следующим образом:

$L_k = [A_0, \dots, A_k] \equiv [0, i]$; $L^1_{k-1} = [A_1, \dots, A_k] \equiv [i]$; ${}^1L_{k+1} = [A_0, \dots, A_{k+1}] \equiv [0, i, k+1]$.

Тогда при смещении плоскости L_k в направлении d_1, определяемом торсом, имеем:

$d_1[0, i]$ –(характеристика)→$[i]$→(фокальная плоскость)→ →$[0, i, k+1]$. Точка A_0 при таком отнесении неособая, поэтому формы ω_0^{k+1}, ω_0^{k+2} и ω_0^{k+3} линейно независимы и могут быть приняты за базисные. Дифференциальные уравнения поверхности имеют вид [2]:

$$\omega_0^p = 0, \quad \omega_i^{k+1} = \ell_{i2}^{k+1}\,\omega_0^{k+2} + \ell_{i3}^{k+1}\,\omega_0^{k+3},$$

$$\omega_i^{k+2} = \ell_{i2}^{k+2}\,\omega_0^{k+2} + \ell_{i3}^{k+2}\,\omega_0^{k+3}, \quad \omega_i^{k+3} = \ell_{i2}^{k+3}\,\omega_0^{k+2} + \ell_{i3}^{k+3}\,\omega_0^{k+3},$$

$$\omega_i^p = \ell_{i2}^p\,\omega_0^{k+2} + \ell_{i3}^p\,\omega_0^{k+3}.$$

Легко показать, что характеристика $L^1_{k-1} = [i]$ и фокальная плоскость ${}^1L_{k+1} = [0, i, k+1]$ в общем случае описывают соответственно поверхности ${}_1V_{(k-1)+1}$ и ${}_1V_{(k+1)+3}$ с соответствующим семейством торсов, что и у поверхности ${}_1V_{k+3}$. Поэтому поверхность ${}_1V_{k+3}$ порождает цепь фокальных поверхностей, описываемых плоскостями характеристического флага [3]. Образующая плоскость L_k поверхности ${}_1V_{k+3}$ является соприкасающейся порядка k плоскостью к произвольной линии произвольной трехмерной поверхности ${}_1V_{0+3}$, описываемой точкой $L_0^{\overline{11\dots1}}$ [2].

2. Рассмотрим поверхности ${}_2V_{k+3}$ с различными характеристиками образующей плоскости. Пусть теперь $i, j = \overline{2,k}$; $p, q = \overline{k+4, N}$.

При смещении d_1 и d_2 в направлении первого и второго торсов образующая плоскость L_k поверхности ${}_2V_{k+3}$ порождает две характеристики и две фокальные плоскости. Определим их вместе с образующей плоскостью следующим образом:

$L_k=[0,1,i]$, $L^1_{k-1}=[1,i]$, $L^2_{k-1}=[A_1-A_0,A_2,\dots,A_k]\equiv$

$\equiv[1-0,i]$, ${}^1L_{k+1}=[0,1,i,k+1]$, ${}^2L_{k+1}=[0,1,i,k+2]$.

Таким образом, $d_1[0,1,i]\to$ (характеристика) $\to[1,i]\to$ (фокальная поверхность) $\to[0,1,i,k+1]$, $d_2[0,1,i]\to$ (характеристика) $\to[1-0,i]\to$ (фокальная плоскость) $\to[0,1,i,k+2]$.
По-прежнему за базисные выберем формы ω_0^{k+1}, ω_0^{k+2} и ω_0^{k+3}. Дифференциальные уравнения поверхности ${}_2V_{k+3}$ примут вид:

$$\omega_0^p=0,\quad \omega_1^{k+1}=\ell_{13}^{k+1}\omega_0^{k+3},\quad \omega_1^{k+2}=\omega_0^{k+2}+\ell_{13}^{k+3}\omega_0^{k+3},\tag{1}$$

$$\omega_1^{k+3}=\ell_{13}^{k+3}\omega_0^{k+3},\quad \omega_1^p=\ell_{13}^p\omega_0^{k+3},\quad \omega_i^{k+1}=\ell_{i3}^{k+1}\omega_0^{k+3},$$

$$\omega_i^{k+2}=\ell_{i3}^{k+2}\omega_0^{k+3},\quad \omega_i^{k+3}=\ell_{i3}^{k+3}\omega_0^{k+3},\quad \omega_i^p=\ell_{i3}^p\omega_0^{k+3}.$$

Дифференцируя уравнения (1) внешним образом, получаем квадратичные уравнения:

$$\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^p+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^p+\omega_0^{k+3}\wedge(\omega_{k+3}^p-\ell_{13}^p\omega_0^1-\ell_{i3}^p\omega_0^i)=0,$$

$$\omega_1^0\wedge\omega_0^{k+1}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+1}=\Delta\ell_{13}^{k+1}\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{13}^{k+1}(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3}),$$

$$\omega_{k+1}^{k+2}\wedge\omega_0^{k+1}+\omega_0^{k+2}\wedge(\omega_0^0+\omega_0^1-\omega_1^0-\omega_1^1)=\Delta\ell_{13}^{k+2}\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{13}^{k+2}(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+$$

$$+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3}),\tag{2}$$

$$\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3}=\Delta\ell_{13}^{k+3}\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{13}^{k+3}(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3}),$$

$$\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^p=\Delta\ell_{13}^p\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{13}^p(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3}),$$

$$\omega_i^0\wedge\omega_0^{k+1}=\Delta\ell_{i3}^{k+1}\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{i3}^{k+1}(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3}),$$

$$(\omega_i^0+\omega_i^1)\wedge\omega_0^{k+2}=\Delta\ell_{i3}^{k+2}\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{i3}^{k+2}(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3}),$$

$$\Delta\ell_{i3}^{k+3}\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{i3}^{k+3}(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3})=0,$$

$$\Delta\ell_{i3}^p\wedge\omega_0^{k+3}+\ell_{i3}^p(\omega_0^{k+1}\wedge\omega_{k+1}^{k+3}+\omega_0^{k+2}\wedge\omega_{k+2}^{k+3})=0.$$

Т е о р е м а. Если касательное пространство характеристической плоскости выходит из объединения фокальных плоскостей, то поверхность ${}_2V_{k+3}$ расслаивается на ∞^1 поверхностей ${}_2V_{k+2}$ с соответствующей системой торсов, что и у исходной поверхности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из двух последних уравнений, входящих в (2), получаем:

$$\ell_{i3}^{k+3}(\ell_{k+1,2}^{k+3}-\ell_{k+2,1}^{k+3})=0,\quad \ell_{i3}^p(\ell_{k+1,2}^{k+3}-\ell_{k+2,1}^{k+3})=0.$$

Если касательное пространство характеристической плоскости $L_{k-2}=[i]$ выходит из объединения фокальных плоскостей, то хотя бы один из коэффициентов двух групп ℓ_{i3}^{k+3} и ℓ_{i3}^p отличен от нуля. Поэтому $\ell_{k+1,2}^{k+3}-\ell_{k+2,1}^{k+3}=0$ и $\mathcal{D}\omega_0^{k+3}\equiv0\ (\mathrm{mod}\ \omega_0^{k+3})$, что и доказывает теорему.

Можно показать, что в случае расслоения поверхности ${}_2V_{k+3}$ на ∞^1 тангенциально вырожденных поверхностей ${}_2V_{k+2}$ характеристики L^1_{k-1} и L^2_{k-1} и фокальные плоскости ${}^1L_{k+1}$ и ${}^2L_{k+1}$ описывают соответственно поверхности ${}_2V_{(k-1)+3}$ и ${}_2V_{(k+1)+3}$ с соответствующей системой торсов, что и у исходной поверхности ${}_2V_{k+3}$. Сама плоскость L_k, ее характеристики L^1_{k-1} и L^2_{k-1}, фокальные плоскости ${}^1L_{k+1}$ и ${}^2L_{k+1}$ обладают лапласовыми преобразованиями со всеми их свойствами. Характеристики плоскостей L^1_{k-1} и L^2_{k-1} называются характеристиками второго порядка плоскости L_k. Плоскость L_k в общем случае имеет три различных характеристики второго порядка: L^{11}_{k-2}, $L^{12}_{k-2}=L^{21}_{k-2}$ и L^{22}_{k-2}. Аналогично определяются характеристики третьего порядка плоскости L_k и т.д. В дифференциальной окрестности порядка k плоскости L_k мы придем к точкам $L_0^{\overbrace{11\ldots1}^{k}}$ и $L_0^{\overbrace{22\ldots2}^{k}}$, описывающим трехмерные поверхности ${}_2V_{0+3}$. Каждая из этих поверхностей расслаивается на ∞^1 двумерных поверхностей ${}_2V_{0+2}$, несущих сопряженные сети, соответствующие торсам исходной поверхности. Плоскость L_k является соприкасающейся порядка k плоскостью к линии ω_0^{k+1} на трехмерной поверхности $L_0^{\overbrace{11\ldots1}^{k}}$ и к линии ω_0^{k+2} на трехмерной поверхности $L_0^{\overbrace{22\ldots2}^{k}}$. Направления ω_0^{k+1} и ω_0^{k+2} выделяют на этих поверхностях сопряженную 2-ткань, соответствующую фокальной [2].

Пусть теперь уравнение $\omega_0^{k+3}=0$ не является вполне интегрируемым, т.е. поверхность ${}_2V_{k+3}$ не расслаивается на ∞^1 поверхностей ${}_2V_{k+2}$. Можно показать, что в этом случае поверхность ${}_2V_{k+3}$ может иметь только следующее строение.

A). Каждая из характеристик L^1_{k-1} и L^2_{k-1} имеет только один торс, соответствующий тому торсу, который выделяет данную характеристику. Характеристическая плоскость L_{k-2} имеет два торса, в общем случае не соответствующие торсам поверхности, описанной плоскостью L_k. То, что такие плоскостные поверхности существуют, подтверждает следующий пример поверхности ${}_2V_{6+3}$ в P_{10}:

$$\omega_0^0=0,\ \omega_0^1=0,\ \omega_0^i=0,\ \omega_0^{10}=0,\ \omega_1^0=0,\ \omega_1^1=0,\ \omega_1^i=0,$$
$$\omega_1^7=0,\ \omega_1^8=\omega_0^8,\ \omega_1^9=-2\omega_0^9,\ \omega_1^{10}=0,\ \omega_i^0=\ell_{i1}^0\omega_0^7+\ell_{i2}^0\omega_0^8,$$
$$\omega_i^1=\ell_{i1}^1\omega_0^7+\ell_{i2}^1\omega_0^8,\ \omega_i^j=0,\ \omega_i^7=\ell_{i3}^7\omega_0^9,\ \omega_i^8=\ell_{i3}^8\omega_0^9,$$
$$\omega_i^9=0,\ \omega_i^{10}=0,\ \omega_7^0=0,\ \omega_7^1=0,\ \omega_7^i=0,\ \omega_7^7=0; \quad (3)$$
$$\omega_7^8=0,\ \omega_7^9=\omega_0^7+3\omega_0^8,\ \omega_7^{10}=0,\ \omega_8^0=0,\ \omega_8^1=0,$$
$$\omega_8^i=0,\ \omega_8^7=0,\ \omega_8^8=0,\ \omega_8^9=2\omega_0^7+\omega_0^8,\ \omega_8^{10}=0,$$
$$\omega_9^0=0,\ \omega_9^1=0,\ \omega_9^i=0,\ \omega_9^7=\omega_9^8=\omega_9^9=\omega_9^{10}=0,$$
$$\omega_{10}^0=0,\ \omega_{10}^1=\omega_{10}^i=0,\ \omega_{10}^7=\omega_{10}^8=\omega_{10}^9=\omega_{10}^{10}=0,$$

где

$$\ell_{i1}^0=\tfrac{1}{3}\ell_{i3}^7+\tfrac{4}{3}\ell_{i3}^8,\ \ell_{i2}^0=-\ell_{i3}^7,\ \ell_{i1}^1=-\tfrac{1}{3}\ell_{i3}^7-\tfrac{1}{3}\ell_{i3}^8,$$
$$\ell_{i2}^1=-2\ell_{i3}^7-\tfrac{1}{2}\ell_{i3}^8,\ \ell_{i3}^7=\mathrm{Const},\ \ell_{i3}^8=\mathrm{Const},\ i=2,3,\ldots,6.$$

Система уравнений (3) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Максимальный произвол решения системы равен $\uparrow\uparrow$8 произвольным постоянным.

B). Характеристики характеристической плоскости совпадают.

C). ${}_2V_{k+3}$ есть конус с $(k-2)$-мерной вершиной [i].

Список литературы

I. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., ГИТТЛ, 1948.

2. С е н и л о в А.С. Проективная классификация двухпараметрических семейств k-мерных плоскостей многомерных проективных пространств.- В кн.: Дифференциальная геометрия. Межвуз. сб. Калинин, 1977.

3. Г е й д е л ь м а н Р.М., Кругляков Л.З. О плоскостных поверхностях.- ДАН СССР, 1974, т. 219, № I.